

অধ্যায়-১

আংশিক ভগ্নাংশ (Partial Fractions)

১.০ (ক) মূলদ ভগ্নাংশ (Rational fraction) :

$\frac{N(x)}{D(x)}$ আকারের রাশিকে মূলদ বীজগাণিতীয় ভগ্নাংশ বলে। অর্থাৎ, একটি বহুপদী $N(x)$ -কে হর (Numerator) এবং একটি বহুপদী $D(x)$ -কে লব (Denominator/divisor) নিয়ে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ বলে।

$$N(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

$$D(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_m$$

এখানে a_0, a_1, \dots, a_n ; b_0, b_1, \dots, b_m ধ্রুবক এবং n, m যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যা।

যেমন- $\frac{3x-8}{x^2-5x+6} = \frac{5x^2-4}{x^2(x-2)}$

(খ) আংশিক ভগ্নাংশ (Partial fraction) :

যদি কোনো মূলদ বীজগাণিতীয় ভগ্নাংশ $\frac{N(x)}{D(x)}$ -কে দুই বা ততোধিক সহজ ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করা হয়, তখন শেষের ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলা হয়।

যেমন- $\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$

এখানে, প্রথম ভগ্নাংশ $\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}$ কে দুইটি ভগ্নাংশ $\frac{1}{x+1}$

এবং $\frac{2}{x+2}$ এর যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায়। অতএব, $\frac{1}{x+1}$ এবং

$\frac{2}{x+2}$ প্রতিটি $\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}$ ভগ্নাংশের এক একটি আংশিক ভগ্নাংশ।

আংশিক ভগ্নাংশ সমাকলন করার সময় বেশি প্রয়োগ করা হয়।

১.১ প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভগ্নাংশ (Proper and improper fractions) :

প্রকৃত ভগ্নাংশ (Proper fraction) : মূলদ বীজগাণিতীয় ভগ্নাংশের যদি লব $N(x)$ এবং হর $D(x)$ উভয় x চলকের বহুপদী এবং লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা ছোট হয়, তা হলে ভগ্নাংশটিকে প্রকৃত ভগ্নাংশ (Proper fraction) বলে।

যেমন- $\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}$ এবং $\frac{2x+6}{x^2-3x+2}$ উভয়ই প্রকৃত ভগ্নাংশ।

অপ্রকৃত ভগ্নাংশ (Improper fraction) : যদি লব $N(x)$ -এর মাত্রা হর $D(x)$ -এর মাত্রার সমান বা বড় হয়, তবে ভগ্নাংশটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ (Improper fraction) বলে।

যেমন- $\frac{x^4}{x^3+1}$ এবং $\frac{x^2+1}{x+1}$ উভয়ই অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লব $N(x)$ -কে হর $D(x)$ দ্বারা সাধারণ নিয়মে ভাগ করে ভগ্নাংশটিকে পূর্ণ অংশ ও একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

যেমন- $\frac{x^2+1}{x-1} = (x+1) + \frac{2}{x-1}$; $\frac{x^4}{x^3+1} = 1 - \frac{1}{x^3+1}$

১.২ আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্তিকরণ (Resolve into partial fraction) :

বিভিন্ন ধরনের প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশকে কীভাবে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়, তা নিয়ে বর্ণনা করা হলো-

একটি প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করতে হলে এর হর $D(x)$ -কে সম্ভাব্য সরলতম বাস্তব উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হবে। এগুলো একঘাতবিশিষ্ট বা দ্বিঘাতবিশিষ্ট হবে এবং কোনো কোনো উৎপাদক পুনরাবৃত্ত হতে পারে।

প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করার নিয়মাবলি-

(a) প্রকৃত ভগ্নাংশের হর $D(x)$ এর প্রতিটি $(x-a)$ অপুনরাবৃত্ত (No-repeated) একঘাত উৎপাদকের জন্য $\frac{A}{x-a}$ আকারের একটি আংশিক উৎপাদক থাকবে, যেখানে A একটি ধ্রুবক।

যেমন- $\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

(b) $D(x)$ -এর প্রতিটি n -বার পুনরাবৃত্ত (Repeated) একঘাত উৎপাদক অর্থাৎ প্রতিটি $(x-a)^n$ উৎপাদকের জন্য $\frac{A_1}{x-a} +$

$\frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$ আকারের n -সংখ্যক আংশিক ভগ্নাংশের একটি দল থাকবে।

যেমন- $\frac{3x^2+x-1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$

(c) $D(x)$ -এর প্রতিটি অপুনরাবৃত্ত (No-repeated) দ্বিঘাত উৎপাদক (Quadratic factor) x^2+px+q এর জন্য $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ আকারের একটি আংশিক ভগ্নাংশ থাকবে।

যেমন- $\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$

যেখানে A, B, C ধ্রুবক।

(d) $D(x)$ এর প্রতিটি n বার পুনরাবৃত্ত (Repeated) দ্বিঘাত উৎপাদক $(x^2+px+q)^n$ এর জন্য

$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_n+C_n}{(x^2+px+q)^n}$ আকারের n -সংখ্যক আংশিক ভগ্নাংশের একটি দল থাকবে।

যেমন- $\frac{x}{(x+1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$

এখানে A, B, C, D, E, \dots ইত্যাদি ধ্রুব রাশি।

অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করার নিয়ম :

যখন অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লব $N(x)$ এর ঘাত হর $D(x)$ এর ঘাত অপেক্ষা বৃহত্তর বা সমান হয়, তখন লব $N(x)$ -কে হর $D(x)$ দ্বারা ভাগ করে লবের ঘাত হর অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করতে হয়। অর্থাৎ, অপ্রকৃত ভগ্নাংশটিকে একটি পূর্ণ অংশ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

যেমন- $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3} = 2 + \frac{x-5}{x^2+2x-3}$

এখন প্রকৃত ভগ্নাংশকে উপরের বর্ণিত নিয়মে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে একত্রে প্রকাশ করা যায়।

যেমন- উদাহরণ ৫নং এবং উদাহরণ ১০ নং দেখ।

(vi) - (v) হতে পাই, $5C = \frac{-8}{5} - \frac{3}{5} = \frac{-11}{5}$

$\therefore C = \frac{-11}{25}$

C এর মান সমীকরণ (v)-এ বসিয়ে পাই, $D = \frac{3}{5} - \frac{11}{25} = \frac{4}{25}$

C এর মান সমীকরণ (ii)-এ বসিয়ে পাই, $B = \frac{11}{25}$

সুতরাং, $\frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)}$

$= \frac{2}{5(x-1)^2} + \frac{11}{25(x-1)} - \frac{11x-4}{25(x^2+4)}$ (Ans.)

উদাহরণ-১০। আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর: $\frac{x^4}{x^3+1}$

সমাধান: $\frac{x^4}{x^3+1} = x - \frac{x}{x^3+1}$

এখন, $\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}$

ধরি, $\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

বা, $\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$\Rightarrow x = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$ (i)

$\Rightarrow x = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C)$ (ii)

সমীকরণ (i)-এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$-1 = A\{(-1)^2+1+1\} + \{B(-1)+C\}(-1+1)$

বা, $-1 = A(1+1+1)$

বা, $A = -\frac{1}{3}$

সমীকরণ (ii) হতে x^2 ও x সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + B$

বা, $B = -A = \frac{1}{3}$ ($\because A = -\frac{1}{3}$)

আবার, $1 = -A + B + C$

বা, $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + C$

বা, $1 - \frac{2}{3} = C$

বা, $C = \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{x^4}{x^3+1} = x + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2-x+1} = x + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x+1}{3(x^2-x+1)}$ (Ans.)

বিকল্প নিয়ম :

ধরি, $\frac{x^4}{x^3+1} = \frac{x^4}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$= Ax + B + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2-x+1}$ (i)

$\Rightarrow x^4 = Ax(x+1)(x^2-x+1) + B(x+1)(x^2-x+1) + C(x^2-x+1) + (Dx+E)(x+1)$

$\Rightarrow x^4 = Ax(x^3+1) + B(x^3+1) + C(x^2-x+1) + Dx^2 + (D+E)x + E$ (ii)

(ii) নং হতে

x^4 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $1 = A \Rightarrow A = 1$

x^3 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = B \Rightarrow B = 0$

x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = C + D$ (iii)

(ii) নং-এ $x = -1$ বসিয়ে পাই

$1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(1+1+1) + D - D - E + E$

$\Rightarrow 1 = 3C \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

(iii) নং-এ C এর মান বসিয়ে পাই, $0 = \frac{1}{3} + D \Rightarrow D = -\frac{1}{3}$

(ii) নং হতে ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$0 = B + C + E$

$\Rightarrow E = -B - C = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

এখন $A = 1, B = 0, C = \frac{1}{3}, D = -\frac{1}{3}, E = -\frac{1}{3}$ এর মান (i) নং-

এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^4}{x^3+1} = 1 \cdot x + 0 + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x+1}{3(x^2-x+1)}$

$= x + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x+1}{3(x^2-x+1)}$ (Ans.)

বিঃদ্র: ছাত্রছাত্রীরা যদি তোমাদের উত্তর অর্থাৎ আংশিক ভগ্নাংশগুলো একত্রে যোগ করে মূল ভগ্নাংশটি পাও তবে বুঝবে তোমার অঙ্কটি ঠিক হয়েছে।

উদাহরণ-১১। $\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ

কর।

[বাকাশিবো-২০১৭]

সমাধান: ধরি, $\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$ (i)

$\Rightarrow x^2-x+1 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$ (ii)

(ii) নং-এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 - 1 + 1 = A(1+2) + 0$

$\Rightarrow 3A = 1$

$\Rightarrow A = \frac{1}{3}$

(ii) নং-এ $x = 0$ বসিয়ে পাই, $1 = A(0+2) + C(-1)$

$\Rightarrow C = 2A - 1 = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

(ii) নং হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$1 = A + B$

$\Rightarrow B = 1 - A = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$

A, B, C এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2x-1}{3(x^2+2)}$ (Ans.)

উদাহরণ-১২। $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

[বাকাশিবো-২০০৩]

সমাধান: ধরি, $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$ (i)
 $\Rightarrow x^2-x+1 = (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1) + D(x^2+1)$ (ii)

(ii) নং-এ $x=1$ বসিয়ে পাই,
 $1 = (A+B) \cdot 0 + C \cdot 0 + D(1+1)$
 $\Rightarrow 2D = 1$
 $\Rightarrow D = \frac{1}{2}$

x^3 এর সহগ সমাকৃত করে পাই,
 $0 = A + C$

(ii) নং-এ $x^2 = -1$ বসিয়ে পাই,
 $-1 - x + 1 = (Ax+B)(x-1)^2 + C \cdot 0 + D \cdot 0$
 বা, $-x = (Ax+B)(x^2-2x+1)$
 বা, $-x = (Ax+B)(-1-2x+1)$
 $[\because x^2 = -1]$
 বা, $-x = (Ax+B)(-2x)$
 বা, $-x = -2Ax^2 - 2Bx$ (iii)

(iii) নং হতে x^2 এর সহগ সমাকৃত করে পাই,
 $A = 0$

আবার x এর সহগ সমাকৃত করে পাই,
 $2B = 1$

$\Rightarrow B = \frac{1}{2}$

এখন $A + C = 0$

$\Rightarrow C = -A = 0$

অতএব আমরা পাই,

$\therefore A = 0, B = \frac{1}{2}, C = 0, D = \frac{1}{2}$

A, B, C, D এর মান (i)-নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}$
 $= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right]$ (Ans.)

উদাহরণ-১৩। $\frac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

[বাকাশিবো-২০১৩]

সমাধান: ধরি, $\frac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ (i)

$\Rightarrow 3x-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$ (ii)

(ii) নং-এ $x=-1$ বসিয়ে পাই,

$-3-1 = A(1+1) + 0$

$\Rightarrow 2A = -4$

$\Rightarrow A = -2$

(ii) নং-এ $x=0$ বসিয়ে পাই,

$-1 = A + C$

$\therefore C = -1 - A = -1 + 2 = 1$

(ii) নং এর উভয় পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমাকৃত করে পাই,

$0 = A + B$

$\Rightarrow B = -A = -(-2) = 2$

A, B, C এর মান (i)-এ বসিয়ে পাই,

$\frac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x+1}$ (Ans.)

অনুশীলনী-১

অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর:

১। বীজগাণিতীয় প্রকৃত ভগ্নাংশ কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৩, ০৪, ১১(পরি)]

অথবা, প্রকৃত ভগ্নাংশের সংজ্ঞা দাও। [বাকাশিবো-২০২৪(পরি) TT (অনুষ্ঠিত)]

উত্তর: যদি লব, হর অপেক্ষা নিম্নমাত্রার (অর্থাৎ যদি লব < হর, q) হয় তাহলে ভগ্নাংশটিকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলে।

২। বীজগাণিতীয় অপ্রকৃত ভগ্নাংশ কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৯(পরি), ১১, ১৬(পরি), ১৭(পরি)]

উত্তর: যদি লব, হর অপেক্ষা বড় মাত্রার হয়, তবে ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে।

৩। মূলদ বীজগাণিতীয় ভগ্নাংশ কাকে বলে?

উত্তর: $N(x)/D(x)$ এই ধরনের রাশিকে মূলদ বীজগাণিতীয় ভগ্নাংশ বলে।

৪। বীজগাণিতীয় আংশিক ভগ্নাংশ কাকে বলে?

উত্তর: যদি কোনো মূলদ বীজগাণিতীয় ভগ্নাংশ $N(x)/D(x)$ দুই বা ততোধিক সহজ ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে প্রকাশ হয়, তবে পরবর্তী ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রদত্ত ভগ্নাংশটির আংশিক ভগ্নাংশ বলে।

৫। অপ্রকৃত ভগ্নাংশ কীরূপে প্রকাশ করা যায়?

উত্তর: অপ্রকৃত ভগ্নাংশ ভাগের প্রক্রিয়ায় একটি পূর্ণ অংশ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।

৬। যখন অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের মাত্রা সমান হয়, তখন কীভাবে লেখা হয়?

উত্তর: অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের মাত্রা সমান হলে ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে একে $\frac{N(x)}{D(x)} = A + \frac{\psi(x)}{D(x)}$ আকারে লেখা যায়, যেখানে A একটি ধ্রুব এবং $\psi(x)$ এর মাত্রা D(x) এর মাত্রা অপেক্ষা কম।

৭। যখন অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লবের মাত্রা হরের মাত্রা অপেক্ষা বেশি হয় তখন কী আকারে প্রকাশ করা হয়?

উত্তর: যখন অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লবের মাত্রা হরের মাত্রা অপেক্ষা এক বেশি হয়, তখন $\frac{N(x)}{D(x)} = Ax + B + \frac{\psi(x)}{D(x)}$ আকারে লেখা হয়, যেখানে $\psi(x)$ প্রকৃতি ভগ্নাংশ এবং A ও B ধ্রুবক।

৮। $\frac{1}{x(x+1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [বাকাশিবো-২০১৩]

উত্তর: ধরি, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$
 $\Rightarrow 1 = A(x+1) + Bx$ (i)

সমীকরণ (i)-এ $x=-1$ বসিয়ে পাই,
 $\Rightarrow 1 = A(-1+1) - B$
 $\therefore B = -1$

আবার, সমীকরণ (i)-এ $x=0$ বসিয়ে পাই,
 $\Rightarrow 1 = A(0+1) + B \times 0$
 $\therefore A = 1$

$\therefore \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ (Ans.)

১৮। $\frac{x+2}{x^2(x-1)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ কর।
[বাকাশিবো-২০০৪(পরি), ১১, ১৫(T.T)]

উত্তর: $\frac{x+2}{x^2(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$ (Ans.)

১৯। $\frac{1}{(x+1)(x^2+2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশরূপে লেখ।

[বাকাশিবো-২০০২(পরি), ০৩(পরি)]

উত্তর: $\frac{1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$ (Ans.)

২০। $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশরূপে লেখ।

[বাকাশিবো-২০০৬(পরি), ১০]

উত্তর: $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ (Ans.)

২১। $\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশরূপে লেখ। [বাকাশিবো-২০০৩, ২০০৫, ২০০৭, ২০১০(JT), ১৮, ২৩]

উত্তর: $\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$ (Ans.)

২২। $\frac{x^2-x-1}{(x+2)^2(x^2+1)^2}$ -এর আংশিক ভগ্নাংশের ধ্রুবকের মাধ্যমে প্রকাশ কর। [বাকাশিবো-২০১৩]

উত্তর: $\frac{x^2-x-1}{(x+2)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$ (Ans.)

২৩। $\frac{x^2}{x^3-1}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন। [JT-২০১৩(পরি)]

উত্তর: $\frac{x^2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ (Ans.)

২৪। $\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশের ধ্রুবকে প্রকাশ কর। [বাকাশিবো-২০০৩, ০৫, ০৭, ১০, ১১; JT-২০১১]

উত্তর: $\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$ (Ans.)

২৫। $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশের ধ্রুবকের মাধ্যমে প্রকাশ কর। [বাকাশিবো-২০০৫, ১১(পরি), ১৩(পরি), ১৫]

অথবা, $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশরূপে লেখ।

[বাকাশিবো-২০২৪]

উত্তর: $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$ (Ans.)

২৬। $\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ কর।

[JT-২০১১]

উত্তর: $\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$ (Ans.)

১৮। $\frac{1}{(1-x)(1+x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

[বাকাশিবো-২০০০, ০১, ১২(পরি)]

উত্তর: ধরি, $\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$

এখন $A = \left[\frac{1}{1+x} \right]_{1-x=0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

এবং $B = \left[\frac{1}{1-x} \right]_{1+x=0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$ (Ans.)

১৯। $\frac{x^2+1}{x(x^2+1)^2}$ -এর আংশিক ভগ্নাংশের ধ্রুবকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

উত্তর: $\frac{x^2+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$ (Ans.)

২০। $\frac{3x+4}{(x+1)(x+3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [বাকাশিবো-২০১৭]

সমাধান: ধরি, $\frac{3x+4}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$

$\therefore A = \left[\frac{3x+4}{x+3} \right]_{x+1=0} = \frac{3(-1)+4}{-1+3} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore B = \left[\frac{3x+4}{x+1} \right]_{x+3=0} = \frac{3(-3)+4}{-3+1} = \frac{-9+4}{-2} = \frac{5}{2}$

$\therefore \frac{3x+4}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{5}{2(x+3)}$ (Ans.)

২১। $\frac{x^2+x+3}{(x^2+3)(x+1)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশের ধ্রুবকের মাধ্যমে লেখ। [বাকাশিবো-২০১৪]

সমাধান: $\frac{x^2+x+3}{(x^2+3)(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$ (Ans.)

২২। $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x+1)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশ কর। [বাকাশিবো-২০১৫]

সমাধান: $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ (Ans.)

২৩। $\frac{1}{x^2+7x-18}$ কে আংশিক ভগ্নাংশ আকারে লেখ।

[বাকাশিবো-২০১৩(T.T)]

উত্তর: $\frac{1}{x^2+7x-18} = \frac{1}{(x+9)(x-2)}$

$= \frac{A}{x+9} + \frac{B}{x-2}$ (Ans.)

২৪। $\frac{x^4}{x^4-1}$ কে আংশিক ভগ্নাংশ আকারে লেখ।

[বাকাশিবো-২০১৪(T.T)]

উত্তর: $\frac{x^4}{x^4-1} = \frac{(x^4-1)+1}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{x^4-1}$

$= 1 + \frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$

$= 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ (Ans.)

***উদাহরণ-৭। $\frac{1}{x^2+7x-18}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।
[বাকাশিবো-২০০২, ২০১৩(JT, TT, GMT)]

অথবা, আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর: $\frac{1}{(x+9)(x-2)}$
[বাকাশিবো-২০২২(পরি) (অনুষ্ঠিত-২০২৩)]

সমাধান: $\frac{1}{x^2+7x-18} = \frac{1}{(x+9)(x-2)}$

ধরি, $\frac{1}{(x+9)(x-2)} = \frac{A}{x+9} + \frac{B}{x-2}$ (i)

বা, $1 = A(x-2) + B(x+9)$ (ii)

(ii) নং-এ $x=2$ বসিয়ে পাই, $1 = 11B$

$$\therefore B = \frac{1}{11}$$

আবার, (ii) নং-এ $x=-9$ বসিয়ে পাই, $1 = -11A$

বা, $A = -\frac{1}{11}$

A ও B এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{x^2+7x+18} \text{ বা, } \frac{1}{(x+9)(x-2)} = -\frac{1}{11(x+9)} + \frac{1}{11(x-2)}$$

$$= \frac{1}{11} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+9} \right] \text{ (Ans.)}$$

✚ রচনামূলক প্রশ্নের উদাহরণমালা :

**উদাহরণ-৮। আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর: $\frac{4+7x}{(2+3x)(1+x)^2}$
[বাকাশিবো-২০০৩]

সমাধান:

ধরা যাক, $\frac{4+7x}{(2+3x)(1+x)^2} = \frac{A}{2+3x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{1+x}$

উভয়পক্ষকে $(2+3x)(1+x)^2$ দ্বারা গুণ করে,

$$4+7x = A(1+x)^2 + B(2+3x) + C(2+3x)(1+x) \dots (i)$$

সমীকরণ (i)-এ $x=-1$ বসিয়ে পাই,

$$4+7(-1) = A(1-1)^2 + B(2-3) + C(2-3)(1-1)$$

$$\text{বা, } 4-7 = B(-1) \text{ বা, } -3 = -B$$

$$\therefore B = 3$$

আবার, $x = \frac{-2}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$4 + 7 \left(-\frac{2}{3} \right) = A \left(1 - \frac{2}{3} \right)^2 + B \left(2 - 3 \times \frac{2}{3} \right) + C \left(2 - \frac{3 \times 2}{3} \right) \left(1 - \frac{2}{3} \right)$$

$$4 - \frac{14}{3} = A \left(\frac{1}{3} \right)^2 \text{ বা, } -\frac{2}{3} = \frac{A}{9} \text{ বা, } A = -6$$

যেহেতু, (i) একটি অভেদ, অতএব, (i)-এ x^2 এর সহগ সমীকৃত করে আমরা পাই,

$$0 = A + 3C$$

$$\text{বা, } 0 = -6 + 3C \text{ বা, } 3C = 6$$

$$\therefore C = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{অতএব, } \frac{4+7x}{(2+3x)(1+x)^2} = \frac{2}{1+x} + \frac{3}{(1+x)^2} - \frac{6}{2+3x} \text{ (Ans.)}$$

বিকল্প নিয়ম :

$$\text{ধরি, } \frac{4+7x}{(2+3x)(1+x)^2} = \frac{A}{2+3x} + \frac{B}{(1+x)} + \frac{C}{(1+x)^2}$$

$$\text{এখন } A = \left[\frac{4+7x}{(1+x)^2} \right]_{2+3x=0}$$

$$= \frac{4+7 \left(-\frac{2}{3} \right)}{\left(1 - \frac{2}{3} \right)^2} = \frac{4 - \frac{14}{3}}{\left(\frac{1}{3} \right)^2} = \frac{-2}{3} \times 9 = -6$$

$$C = \left[\frac{4+7x}{2+3x} \right]_{1+x=0} = \frac{4+7(-1)}{2+3(-1)} = \frac{4-7}{2-3} = \frac{-3}{-1} = 3$$

এখন (i) নং-কে $(2+3x)(1+x)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$4+7x = A(1+x)^2 + B(1+x)(2+3x) + C(2+3x) \dots (ii)$$

(ii) নং-এ $x=0$ বসিয়ে পাই,

$$4 = A + 2B + 2C$$

$$\text{বা, } 4 = -6 + 2B + 2(3) \text{ বা, } 4 = 2B$$

$$\therefore B = 2$$

A, B, C এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{4+7x}{(2+3x)(1+x)^2} = \frac{-6}{2+3x} + \frac{2}{1+x} + \frac{3}{(1+x)^2} \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ-৯। আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর: $\frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)}$

সমাধান: মনে করি,

$$\frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

উভয়পক্ষকে $(x-1)^2(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে,

$$x^2+x = A(x^2+4) + B(x-1)(x^2+4) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$$\text{বা, } x^2+x = (B+C)x^3 + (A-B-2C+D)x^2 + (4B+C-2D)x + (4A-4B+D) \dots (ii)$$

সমীকরণ (ii)-এ $x=1$ বসিয়ে আমরা পাই, $1+1 = A(1+4) + B(1-1)(1+4) + (C+D)(1-1)^2$

$$\text{বা, } 2 = 5A \therefore A = \frac{2}{5}$$

যেহেতু (ii) একটি অভেদ, সুতরাং x^3 ও x^2 -এর সহগ

প্রবক পদগুলোকে ধারাবাহিকভাবে সমীকৃত করে,

$$0 = B + C,$$

$$\text{বা, } C = -B$$

$$1 = A - B + D - 2C \dots (iii)$$

$$0 = 4A - 4B + D \dots (iv)$$

সমীকরণ (iii) হতে পাই,

$$1 = \frac{2}{5} + C + D - 2C \quad [\because B = -C]$$

$$\text{বা, } \frac{3}{5} = D - C$$

$$\text{বা, } -C + D = \frac{3}{5} \dots (v)$$

সমীকরণ (iv) হতে পাই, $0 = \frac{8}{5} + 4C + D$ [$\because B = -C$]

$$\text{বা, } 4C + D = -\frac{8}{5} \dots (vi)$$

(vi) - (v) হতে

$$\therefore C = \frac{-11}{25}$$

C এর মান

C এর মান

সুতরাং, $\frac{x}{(x-1)^2}$

$$= \frac{2}{5(x-1)^2}$$

উদাহরণ-১০

সমাধান:

এখন, $\frac{x}{x^2+4}$

ধরি, $\frac{x}{(x+1)}$

বা, $\frac{x}{(x+1)}$

$$\Rightarrow x = A(x-1)^2 + B(x-1) + C(x+1)$$

$$\Rightarrow x = A(x^2-2x+1) + B(x-1) + C(x+1)$$

সমীকরণ

$$-1 = A(1-2+1) + B(1-1) + C(1+1)$$

$$\text{বা, } -1 = 2C$$

বা, $A = -\frac{1}{2}$

সমীকরণ

$$0 = A + B + C$$

$$\text{বা, } B = -\frac{1}{2}$$

আবার, $1 = A - B + D - 2C$

$$\text{বা, } 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + D - 2 \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore D = 1$$

সমীকরণ

$$0 = A + 3C$$

$$\text{বা, } B = -\frac{1}{2}$$

আবার, $1 = A - B + D - 2C$

$$\text{বা, } 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore D = 1$$

সমীকরণ

$$0 = A + 3C$$

$$\text{বা, } C = -\frac{1}{3}$$

সুতরাং, $\frac{x^4}{x^3+1}$

$$= \frac{x+1}{3(x^2-x+1)}$$

উদাহরণ-৩। $\frac{3x+4}{(x+1)(x^2+4)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

[JT-2012]

সমাধান: $\frac{3x+4}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$3x+4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1)$ (i)

$x = -1$ (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$3(-1)+4 = A[(-1)^2+4] + (-B+C)(-1+1)$

বা, $1 = A.5 + 0$

$\Rightarrow A = \frac{1}{5}$

(i) নং সমীকরণে $x^2 = -4$ বসিয়ে পাই,

$3x+4 = A(-4+4) - 4B + (B+C)x + C$ (ii)

(ii) নং x -এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$3 = B + C$ (iii)

(ii) নং স্থির রাশির সমীকৃত করে পাই,

$4 = -4B + C$ (iv)

(iii) ও (iv) সমাধান করে পাই, $B = -\frac{1}{5}, C = \frac{16}{5}$

$\therefore \frac{3x+4}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{1}{5(x+1)} - \frac{x}{5(x^2+4)} + \frac{16}{5(x^2+4)}$ (Ans.)

****উদাহরণ-৪।** $\frac{x^2+x+1}{(x+3)(x^2-4)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ

[বাকাশিবো-২০১৪(পরি), ১৫]

সমাধান: $\frac{x^2+x+1}{(x+3)(x^2-4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$

ধরি, $\frac{x^2+x+1}{(x+3)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$ (i)

উভয়পক্ষকে $(x+3)(x+2)(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2+x+1 = A(x+2)(x-2) + B(x+3)(x-2) + C(x+3)(x+2)$ (ii)

(ii) নং-এ $x = -3$ বসিয়ে পাই, $9-3+1 = A(-1)(-5) + B.0 + C.0$

বা, $7 = A.5$

বা, $A = \frac{7}{5}$

আবার, $x = -2$ বসিয়ে পাই, $4-2+1 = A.0 + B.(1)(-4) + C.0$

বা, $3 = -4B$

বা, $B = -\frac{3}{4}$

আবার, $x = 2$ বসিয়ে পাই, $4+2+1 = A.0 + B.0 + C.5$

বা, $7 = 5C$

বা, $C = \frac{7}{5}$

এখন A, B, C এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2+x+1}{(x+3)(x^2-4)} = \frac{7}{5(x+3)} - \frac{3}{4(x+2)} + \frac{7}{5(x-2)}$ (Ans.)

বিঃদ্র: উদাহরণ-৪ নং নিজে ঢাকন পদ্ধতি (Cover up Rule)

অনুসারে কর।

উদাহরণ-৫। আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর: $\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}$

সমাধান: ধরা যাক, $\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3} = \frac{2x^2+4x-6+x-5}{x^2+2x-3}$

$= \frac{2(x^2+2x-3)+x-5}{x^2+2x-3} = 2 + \frac{x-5}{x^2+2x-3}$

এখন, $\frac{x-5}{x^2+2x-3} = \frac{x-5}{x^2+3x-x-3}$

$= \frac{x-5}{x(x+3)-1(x+3)} = \frac{x-5}{(x+3)(x-1)}$

মনে করি, $\frac{x-5}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$

বা, $x-5 = A(x-1) + B(x+3)$ (i)

সমীকরণ (i)-এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1-5 = B(1+3)$

বা, $-4 = 4B$

$\therefore B = -1$

সমীকরণ (i)-এ $x = -3$ বসিয়ে পাই, $-3-5 = A(-3-1)$

বা, $-8 = -4A$

$\therefore A = 2$

অতএব, $\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3} = 2 + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-1}$ (Ans.)

বিকল্প নিয়ম:

$\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3} = \frac{2x^2+5x-11}{(x+3)(x-1)}$

এখন ধরি, $\frac{2x^2+5x-11}{(x+3)(x-1)} = A + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$ (i)

বা, $2x^2+5x-11 = A(x+3)(x-1) + B(x-1) + C(x+3)$ (ii)

(ii) নং-এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$2.1+5.1-11 = A.0 + B.0 + C(1+3)$

$\Rightarrow 2+5-11 = 4C$

$\Rightarrow -4 = 4C$

$\Rightarrow C = -1$

(ii) নং-এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$2.9+5(-3)-11 = A.0 + B(-3-1) + C.0$

$\Rightarrow 18-15-11 = 0-4B+0$

$\Rightarrow -8 = -4B$

$\Rightarrow B = 2$

উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$2 = A \Rightarrow A = 2$

A, B, C এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই,

$\frac{2x^2+5x-11}{(x+3)(x-1)} = 2 + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-1}$ (Ans.)

*****উদাহরণ-৬।** $\frac{x^2-8}{x(x-2)^3}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

[বাকাশিবো-২০০১, ২০১০(JT, TT, GMT)]

সমাধান: ধরি, $\frac{x^2-8}{x(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$ (i)

উভয়পক্ষকে $x(x-2)^3$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$\Rightarrow x^2-8 = A(x-2)^3 + Bx(x-2)^2 + Cx(x-2) + Dx$ (ii)

$\Rightarrow x^2-8 = (A+B)x^3 + (-6A-4B+C)x^2 + (12A+4B+2C+D)x - 8A$ (iii)

(ii) নং-এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$-8 = -8A$

$\therefore A = 1$

সমীকরণ (ii)-এ $x = 2$ বসিয়ে পাই, $4-8 = A(2-2)^3 + B.2(2-2)^2 + C.2(2-2) + 2D$

বা, $-4 = 2D \therefore D = -2$

এখন, (iii) হতে x^3, x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $0 = A + B$ বা $B = -A = -1$

আবার, $1 = -6A - 4B + C$ বা, $1 = -6+4+C$ বা, $C = 3$

A, B, C, D এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2-8}{x(x-2)^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2}{(x-2)^3}$ (Ans.)

বিকল্প নিয়ম :

(i) যখন অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লব $N(x)$ ও হর $D(x)$ এর মাত্রা সমান :

অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের মাত্রা সমান হলে

$\frac{N(x)}{D(x)} = A + \frac{\Psi(x)}{D(x)}$ আকারে লেখা যায়, যেখানে A একটি ধ্রুব এবং $\Psi(x)$ এর মাত্রা $D(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা কম অর্থাৎ $\frac{\Psi(x)}{D(x)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

যেমন- $\frac{x^3-3}{(x+2)(x^2+1)} \equiv A + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

(i) এর জন্য উদাহরণ ১ এর বিকল্প নিয়ম দেখ।

(ii) যখন অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লবের মাত্রা হরের মাত্রা থেকে এক বা দুই বেশি থাকে সেই ক্ষেত্রে ভগ্নাংশটি নিম্নলিখিতভাবে লেখা হয়-

(a) $\frac{N(x)}{D(x)} = Ax + B + \frac{\Psi(x)}{D(x)}$ আকারে (যখন লবের মাত্রা হর থেকে এক বেশি থাকে।)

যেমন- $\frac{x^3+x^2}{(x-2)(x+1)} \equiv Ax + B + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+1}$

(b) $\frac{N(x)}{D(x)} = Ax^2 + Bx + C + \frac{\Psi(x)}{D(x)}$ আকারে (যখন লব এর মাত্রা হর থেকে দুই বেশি থাকে)

যেমন- $\frac{x^5+x}{(x+2)(x^2+1)} \equiv Ax^2 + Bx + C + \frac{D}{x+2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$

যেখানে A, B, C, D, E, F ইত্যাদি ধ্রুবক

এবং $\frac{\Psi(x)}{D(x)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

(ii) এর a এর জন্য উদাহরণ ১০ এর বিকল্প নিয়মটি দেখ।

টীকা : ঢাকন পদ্ধতি (Cover up rule) :

হরের $(x-a)^n$ উৎপাদকের জন্য $\frac{A_n}{(x-a)^n}$ আংশিক ভগ্নাংশের ধ্রুবক A_n পাওয়ার জন্য প্রদত্ত ভগ্নাংশে $(x-a)^n$ উৎপাদকটি বাদে সকল স্থানে $x \equiv a$ বসাতে হবে। এখানে উল্লেখ্য যে, এ নিয়মে $\frac{A_n}{(x-a)^n}$ এর A_n এর মান পাওয়া যাবে। $(x-a)$ এর অপর উৎপাদক বা উৎপাদকসমূহের হরের ধ্রুবক পূর্বের নিয়মে বের করতে হবে। এই পদ্ধতির জন্য উদাহরণ ১ নং ও উদাহরণ ৮ নং এর বিকল্প নিয়মটি দেখ।

১.৩ উদাহরণমালা (Solutions of the problems related to partial fractions) :

HP **সংক্ষিপ্ত প্রশ্নের উদাহরণমালা :**

উদাহরণ-১। $\frac{3x^2-8x-4}{x^3+x^2-2x}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : এখন, $x^3+x^2-2x = x(x-1)(x+2)$

মনে করি, $\frac{3x^2-8x-4}{x(x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

$x(x-1)(x+2)$ দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে,

$3x^2-8x-4 \equiv A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$ (i)

যেহেতু এটা একটি অভেদ, সুতরাং এটা x -এর সকল জন্যই সত্য।

x -এর যে-সকল মানের জন্য হরের প্রত্যেকটি উৎপাদক শূন্য ক্রমাগতভাবে x -এর ঐ মানগুলো ব্যবহার করা হলো-

সমীকরণ (i)-এ $x=0$ বসালে $-4 = -2A$,

সমীকরণ (i)-এ $x=1$ বসালে $3-8-4 = 3B$

সমীকরণ (i)-এ $x=-2$ বসালে $12+16-4 = 6C$,

সুতরাং, $\frac{3x^2-8x-4}{x^3+x^2-2x} \equiv \frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+2}$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি : Cover up rule (ঢাকন পদ্ধতি) অনুসারে

$\frac{3x^2-8x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{3x^2-8x-4}{x(x-1)(x+2)}$

এখন ধরি, $\frac{3x^2-8x-4}{x(x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$ (i)

এখানে $A = \left[\frac{3x^2-8x-4}{(x-1)(x+2)} \right]_{x=0} = \frac{3 \cdot 0 - 8 \cdot 0 - 4}{(0-1)(0+2)} = -2$

$B = \left[\frac{3x^2-8x-4}{x(x+2)} \right]_{x=1=0} = \left[\frac{3 \cdot 1 - 8 \cdot 1 - 4}{1(1+2)} \right] = -2$

$C = \left[\frac{3x^2-8x-4}{x(x-1)} \right]_{x+2=0} = \frac{3(-2)^2 - 8(-2) - 4}{(-2)(-2-1)} = \frac{12+16-4}{2} = 6$

A, B, C এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই,

$\frac{3x^2-8x-4}{x^3+x^2-2x} \equiv \frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+2}$ (Ans.)

উদাহরণ-২। $\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

[বাকশিবে-২০০]

সমাধান : $\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

বা, $\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} \equiv \frac{A(x+2) + B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

বা, $3x+4 \equiv A(x+2) + B(x+1)$ (i)

সমীকরণ (i)-এ $x=-2$ বসিয়ে পাই,

$3(-2)+4 = A(-2+2) + B(-2+1)$

বা, $-6+4 = B(-1)$

বা, $-2 = -B$

$\therefore B = 2$

সমীকরণ (i)-এ $x=-1$ বসিয়ে পাই,

$3(-1)+4 = A(-1+2)$

$-3+4 = A$

$\therefore A = 1$

\therefore নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ $= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি :

$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

$\therefore A = \left[\frac{3x+4}{x+2} \right]_{x+1=0} = \frac{3(-1)+4}{(-1)+2} = 1$

$B = \left[\frac{3x+4}{x+1} \right]_{x+2=0} = \frac{3(-2)+4}{-2+1} = 2$

$\therefore \frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} \equiv \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$ (Ans.)