বুলিয়ান উপপাদ্য দিয়ে যুক্তি রাশিমালার (Logical expression) সরলীকরণ বা রাশিমালার গঠন পরিবর্তন সাধন করা যায়। প্রাসঙ্গিক বুলিয়ান উপপাদ্যসমূহকে Postulate বলে। এই Postulate-সমূহ নিম্নে দেয়া হলো–

OR	AND	NOT
$A + 0 = A$	$A.0 = 0$	$A + \overline{A} = 1$
$A + 1 = 1$	$A.1 = A$	$A.\overline{A} = 0$
$A + A = A$	$A.A = A$	$\overline{A}.\overline{A} = A$
$A + \overline{A} = 1$	$A.\overline{A} = 0$	$\overline{\overline{A}} = A$

অনুষঙ্গ ঃ 1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $(AB) C = A (BC)$

বিনিময় উপপাদ্য ঃ 1. $A + B = B + A$
2. $AB = BA$

বিভাজন উপপাদ্য ঃ $A(B+C) = AB + AC$

ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য ঃ 1. $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$ (De Morgan's First theorem)
2. $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$ (De Morgan's 2nd theorem)

Duality theorem : 1. $A + AB = A$
2. $A + \overline{A}B = A + B$
3. $(A + B)(A + C) = A + BC$

উপপাদ্যগুলোর প্রমাণ নিম্নে দেয়া হলো–

(a) $A + 1 = 1$

বামপক্ষ $= A + 1 = 1.(A + 1)$ . . . . যেহেতু $A.1 = A$

$= (A + \overline{A}).(A + 1)$. . . . . যেহেতু $A + \overline{A} = 1$

$= A.A + \overline{A}.1$ .... এবং $A A = A$

$= (A + \overline{A}.1)$ . . . . যেহেতু $\overline{A}.1 = \overline{A}$

$= A + \overline{A}$ . . . . যেহেতু $A + \overline{A} = 1$

$= 1$ . . . . $A + \overline{A} = 1$

= ডানপক্ষ

(b) $A.0 = 0$

$A.0 = 0 + (A.0)$ . . . . যেহেতু $A + 0 = A$

$(A.\overline{A}) + (A.0)$ . . . . যেহেতু $A.\overline{A} = 0$

$A.(\overline{A} + 0)$ . . . . যেহেতু $\overline{A} + 0 = \overline{A}$

$= A.\overline{A}$ . . . . যেহেতু $A.\overline{A} = 0$

$= 0$ (প্রমাণিত)

(c) $A + A = A$

$A + A = (A + A).1$ . . . . . . যেহেতু $A.1 = A$

$= (A + A)(A + \overline{A})$ . . . . যেহেতু $A + \overline{A} = 1$.

$= A.A + A.\overline{A}$ . . . . এবং $A.A = A$

$= A + A.\overline{A}$ . . . . যেহেতু $A + \overline{A} = 0$

$= A + 0$ . . . . যেহেতু $A + 0 = A$

$= A$ (প্রমাণিত)

৮.২ ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য (State De Morgan's theorems) ঃ

❑ ডি-মরগ্যানের উপপাদ্য (De-Morgan's theorem) ঃ

ফরাসি গাণিতিক ডি-মরগ্যান (De-Morgan) নিম্নলিখিত দুটি বিশেষ প্রয়োজনীয় উপপাদ্য আবিষ্কার করেন–

$$\overline{A+B} = \bar{A}\,.\,\bar{B}$$

$$\overline{A\,.\,B} = \bar{A}+\bar{B}$$

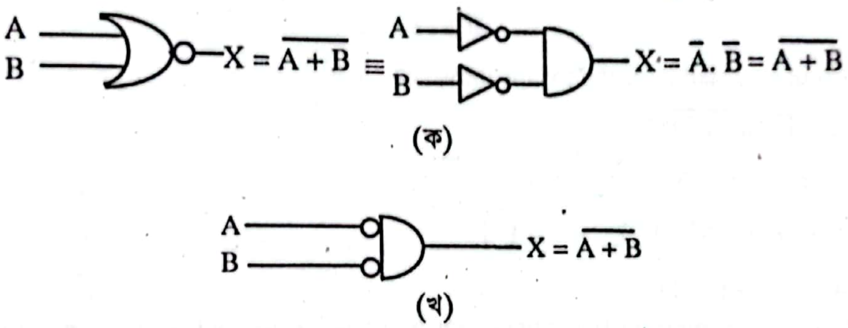
সত্যক সারণির সহায়তায় অতি সহজে উপপাদ্য দুটি প্রমাণ করা সম্ভব। NOT গেইটের সাথে সংশ্লিষ্ট বড় বড় যুক্তি রাশিমালা সরলীকরণের জন্য উপপাদ্য দুটি বিশেষ সহায়ক।

দুই বা দুইয়ের অধিক যে-কোনো সংখ্যক চলকের জন্য উপপাদ্য দুটি ব্যবহার করা সম্ভব। তিনটি চলকের জন্য উপপাদ্য দুটি এমন হয় ঃ

$$\overline{A+B+C} = \bar{A}\,.\,\bar{B}\,.\,\bar{C}$$

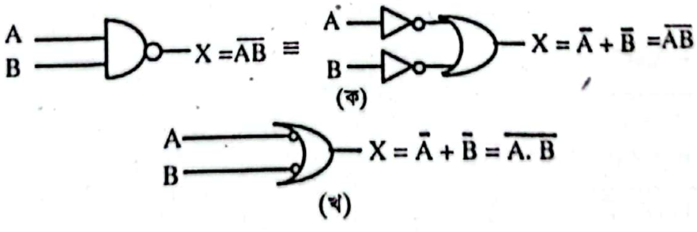
$$\overline{A\,.\,B\,.\,C} = \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$$

প্রথম উপপাদ্য অনুসারে A এবং B ইনপুট সংকেতের জন্য একটি NOR গেইটের আউটপুট সংকেত যা হয়, তা হলো $\bar{A}$ ও $\bar{B}$ ইনপুট সংকেতের জন্য একটি AND গেইটের আউটপুট সংকেতের সমান। এই বর্ণনা দুটিকে ৮.৫ (ক) নং চিত্রে দেখানো হলো। আসলে NOR Operation সরলীকরণের জন্য এই উপপাদ্য ব্যবহার করা হয়। অনেক সময় NOT গেইটের সঙ্গে AND গেইট জুড়ে NOR Operation নির্দিষ্টকরণের জন্য ৮.৫ (খ) নং চিত্রের চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। এই চিত্রে ক্ষুদ্র বৃত্ত দুটি NOT গেইট নির্দিষ্ট করে।



চিত্র ঃ ৮.৫ (ক) ডি-মরগ্যানের প্রথম উপপাদ্যের ব্যাখ্যা, NOR গেইটের অন্য প্রতিরূপ

দ্বিতীয় উপপাদ্য অনুসারে A এবং B গ্রহণ সংকেতের জন্য দুই-ইনপুট NAND গেইটের আউটপুট সংকেত যা হয়, তা হল $\bar{A}$ এবং $\bar{B}$ ইনপুট সংকেতের জন্য একটি দুই ইনপুট OR গেইটের আউটপুট সংকেতের সমান (চিত্র ঃ ৮.৬ (ক))।



চিত্র ঃ ৮.৬ (ক) ডি-মরগ্যানের দ্বিতীয় উপপাদ্যের ব্যাখ্যা,
(খ) NAND গেইটের অন্য প্রতিরূপ

❑ ডি-মরগ্যানের সূত্র ঃ

একই পদ্ধতিতে আরো দুটি গুরুত্বপূর্ণ বুলিয়ান সূত্র প্রমাণ করা যায়। সূত্র দুটি বুলিয়ান অঙ্কের জন্য অত্যন্ত প্রয়োজনীয় এবং এরা ডি-মরগ্যানের সূত্র (De Morgan's theorem) নামে পরিচিত। নিচে সূত্র দুটি দেয়া হলো এবং সেই সঙ্গে সূত্র দুটি প্রমাণ করা হলো–

$(\overline{A+B}) = \bar{A}\,.\,\bar{B} \ldots\ldots (1)$

$(\overline{A\,.\,B}) = \bar{A}+\bar{B} \ldots\ldots (2)$

প্রমাণ ঃ

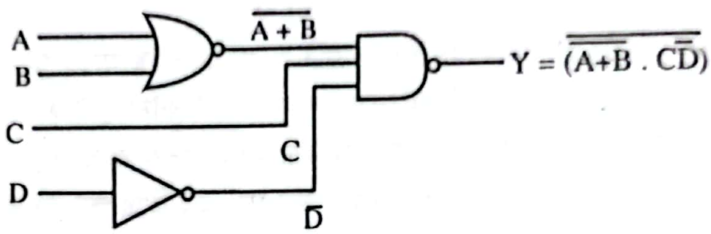
A	$\bar{A}$	B	$\bar{B}$	A + B	A.B	$\overline{A+B}$	$\bar{A}.\bar{B}$	$\overline{A.B}$	$\bar{A}+\bar{B}$
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0

এই তালিকা থেকে দেখা যাচ্ছে A, B-এর সকল সম্ভাব্য মানের জন্য $\overline{A+B} = \bar{A}.\bar{B}$ এবং $\overline{A.B} = \bar{A}+\bar{B}$, ডি-মরগ্যানের সূত্র দুটি প্রমাণিত হলো।

৮.৩ ডি-মরগ্যানের উপপাদ্যের প্রয়োগ (Mention the applications of De Morgan's theorem)

নিচে কিছু লজিক রাশিমালা সমীকরণে ডি-মরগ্যান উপপাদ্যের প্রয়োগ দেখানো হলো–

উদাহরণ-৩ । Determine output expression for the circuit shown below and simplify it using De Morgan's theorem.



চিত্র ঃ ৮.৭

Solution : The output expression for the circuit shown above is :

$$Y = [\overline{(\overline{A+B}).\,C.\,\bar{D}}]$$

Using De Morgan's theorem : $Y = (\overline{\overline{A+B}}) + \bar{C} + \bar{\bar{D}})$

$$Y = (A+B) + \bar{C} + D \quad [\because D = \bar{\bar{D}}]$$

$$\therefore Y = A + B + \bar{C} + D$$

উদাহরণ-৪ । Find the complement of the expressions given below using De Morgan's theorem :

(i) $Y = AB\bar{C} + A\overline{BC}$

(ii) $Y = = \bar{A}(B\bar{C} + \bar{B}C)$

(iii) $Y = \overline{(A + \bar{B} + C)(B + \bar{C})}$

Solution :

(i) $Y = AB\bar{C} + A\overline{BC}$

$$\bar{Y} = \overline{(AB\bar{C} + A\overline{BC})}$$

Applying De Morgan's theorem :

$$\bar{Y} = (\overline{AB\bar{C}}).(\overline{A\overline{BC}})$$

Again applying De Morgan's theorem to the each expression inside the brackets :

$$\bar{Y} = (\bar{A} + \bar{B} + C).(\bar{A} + BC)$$

(ii) $Y = \bar{A}(B\bar{C} + \bar{B}C)$

$$\bar{Y} = \overline{\bar{A}(B\bar{C} + \bar{B}C)}$$

Applying De Morgan's theorem :

$$\bar{Y} = A + \overline{(B\bar{C} + \bar{B}C)}$$

Again applying De Morgan's theorem to the expression inside the brackets :

$$\bar{Y} = A + (\overline{B\bar{C}}).(\overline{\bar{B}C})$$

Applying De Morgan's theorem for the third time we get :

$\bar{Y} = A + (\bar{B} + C).(B + \bar{C})$

or, $\bar{Y} = A + \bar{B}\bar{C} + BC$

(iii) $Y = \overline{(A + \bar{B} + C) + (B + \bar{C})}$

Applying De Morgan's theorem :

$Y = \overline{(A + \bar{B} + C)}.\overline{(B + \bar{C})}$

Again applying De Morgan's theorem :

$Y = (\bar{A}.B.\bar{C}).(\bar{B}.C) = 0 \qquad [\because B.\bar{B} = 0, C.\bar{C} = 0]$

৮.৪ গুণের যোগ (SOP) এবং যোগের গুণ (POS) (State Sum of Product (SOP) and Product of Sum (POS)) ঃ

লজিক রাশিমালা দুইভাবে প্রকাশ করা হয়, যথা–

১। গুণের যোগ গঠন (Sum of product)

২। যোগের গুণ গঠন (Product of sum)

❐ **গুণের যোগ গঠন (Sum of product) ঃ** গুণের যোগ গঠনের উদাহরণ নিম্নে দেয়া হলো–

(i) $ABC + \bar{A}BC + A\bar{B}C$

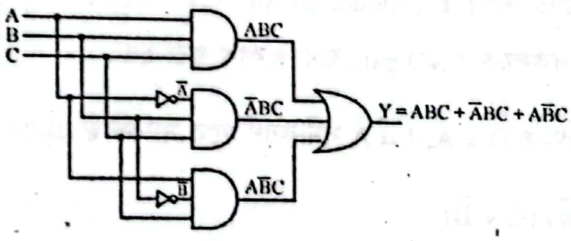
(ii) $A\bar{B}C + AC + B\bar{C}$

(iii) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$

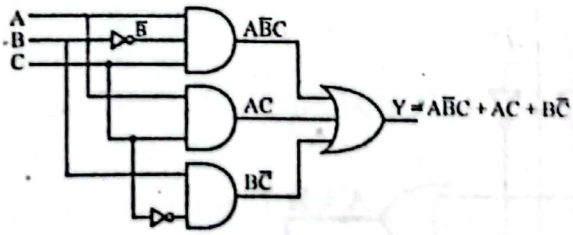
(iv) $AB + B\bar{C} + \bar{B}C$

Sum of product-কে সংক্ষেপে SOP বলা হয়। গুণগুলোকে AND Gate দ্বারা এবং যোগগুলোকে OR Gate দ্বারা প্রকাশ করা হয়। SOP সমীকরণ হতে সার্কিট ডায়াগ্রাম নিম্নে দেখানো হলো–

উদাহরণ-৫ । $ABC + \bar{A}BC + A\bar{B}C$



উদাহরণ-৬ । $A\bar{B}C + AC + \bar{B}C$



উদাহরণ-৭ । $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$